

# 齊次變換在人體上肢數學模式之研究

宋立民

輔英科技大學工業安全衛生系，大寮鄉永芳村進學路 151 號，高雄縣，臺灣

pl032@mail.fy.edu.tw

## 摘要

人體上肢為開放型多自由度的三維空間機構。本文以齊次變換與空間機構的理論為基礎，考慮上肢聯結關節的自由度，建立齊次變換上肢座標系統，分析齊次變換參數與人體動作型態運動參數，發展齊次變換上肢數學模式。同時，以齊次變換上肢數學模式配合人體計測資料庫，建立人體動作型態運動參數與工作姿勢的關係，提供人因工程設計者作為設計空間配置及機械設計者設計機械防護的參考。使工作者在作業場所擁有舒適、安全的工作空間，提高生產效率，避免職業傷害。本文研究成果亦可應用於生物力學與運動學的研究範疇。

關鍵詞：人體上肢、齊次變換

## Abstract

The upper limbs are the spatial mechanisms of open loop type with multiple degrees of freedom. In this paper, the degrees of freedom of the joints are discussed. The coordinate systems of upper limbs with homogeneous transformation are presented. The parameters of homogeneous transformation are analyzed. The kinematic parameters of human motion types are investigated. The mathematical models of upper limbs are formulated by the theory of homogeneous transformation and spatial mechanism. The anthropometric data is applied to analyze the relationships between the work postures and the kinematic parameters of human motion types. The results proposed in this paper are useful for the ergonomic engineers to design the workspace disposition. The results are also helpful for the mechanical engineers to devise the mechanisms for safe protection. The mathematical models of upper limbs with homogeneous transformation can be applied to investigate the fields of biomechanics and kinematics.

Keywords: Upper Limb, Homogeneous Transformation

## 1.前言

在人因工程的學術理論與實際應用上，人體計測資料與工作空間設計扮演十分重要的角色。人體計測是人體物理特徵度量的科學，涵蓋範圍

非常廣泛，其中有關人體各部尺寸的計測資料，更是研究工作空間的重要依據。本文研究齊次變換人體上肢的數學模式，配合人體計測資料庫，展現人體動作型態運動參數與工作姿勢的關聯

性。主要研究目的為提供人因工程設計者作為設計空間配置以及機械設計者設計機械防護的參考，使工作者在作業場所擁有舒適、安全的工作空間，提高生產效率，避免職業傷害。

國內外有關本文的研究情況，在人體計測部分，Stoudt(1981)研究老年人的人體計測。杜壯教授(1988)調查台灣地區少年的人體計測資料。Kroemer(1989)研究工程人體計測。邱魏津教授(1989)調查台灣地區十九歲至二十三歲女子人體計測資料。Culver 和 Viano(1990)研究懷孕婦女坐姿的人體計測資料，防護胎兒以免受到壓迫。Kelly 和 Kroemer(1990)研究老年人的人體計測、狀態與建議。林榮泰教授等人(1993)以電腦輔助設計系統整合人體計測資料庫。Huang 和 You(1994)研究台灣地區女子的人體計測。王茂駿教授等多位著名學者(1997, 2000, 2002)建立本土化靜態與動態的人體計測資料庫、本土化中小學生的人體計測資料庫以及台灣地區人體計測資料庫。在工作姿勢與工作空間部分，Ayoub(1973)研究人體姿勢與作業場所的設計。Das 和 Grady(1983a)以人體計測資料設計作業場所。Das 和 Grady(1983b)分析水平作業面的正常作業區域。Bridger(1988)探討人體姿勢對於傾斜座椅與工作面的適應性。游萬來教授等人(1998, 2001)研究人體手部在水平作業面上的作業區域以及工作平面上手部盲定位的準確性。在空間機構與齊次變換應用部分，蔡穎堅教授等人(1990)以齊次變換與空間機構的理論，研究蝸齒輪的數學模式與力矩參數，探討空間機構歪斜軸蝸齒輪與力矩參數的關係。Tsai 和 Sung(1993)發表歪斜軸齒輪的運動分析以及參數化共軛齒形的數學模式與拘束條件，研究空間機構歪斜軸齒輪的運動特性。Sung 和 Tsai(1994)發展漸開線傘齒輪的齒形比例與裝配誤差，討論空間機構特殊領域一球面機構交叉軸傘齒輪的裝配誤差範圍。Sung 和 Tsai(1997)提出各類傘齒輪的數學模式與嚙合率，利用齊次變換與空間機構的理論，討論球面機構交叉軸傘齒輪的運動特性。以上所述都是本文建立齊次變換上肢數學模式以

及研究人體動作型態運動參數與工作姿勢的主要參考文獻。

## 2.研究方法

人體上肢為開放型多自由度的三維空間機構。本文以齊次變換應用於空間機構座標轉換的理論為基礎，依據上肢聯結關節的自由度，建立適當的齊次變換上肢座標系統，探討齊次變換參數與人體動作型態運動參數的關係，發展齊次變換上肢數學模式。

基本空間機構連桿包含二個接頭，這些接頭具有旋轉或滑行的功能。如圖 1 所示，接頭  $n-1$  與接頭  $n$  的旋轉軸或滑行線為二條歪斜軸（平行軸或交叉軸為歪斜軸的特例），分別為軸  $n-1$  與軸  $n$ 。在軸  $n-1$  與軸  $n$  上，建立二個座標系統  $S_{n-1}(X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1})$  與  $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ 。基本空間機構連桿  $n$  的四個齊次變換參數為連桿長度  $a_n$ 、連桿扭角  $\alpha_n$ 、連桿間旋轉角  $\theta_n$ 、連桿間距離  $d_n$ 。利用齊次變換理論，可敘述空間中任一點在座標系統  $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$  的座標  $(x_n, y_n, z_n)$  與在座標系統  $S_{n-1}(X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1})$  的座標  $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$  之間的變換，如式(1)。

$$\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} = A_{n-1}^n \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

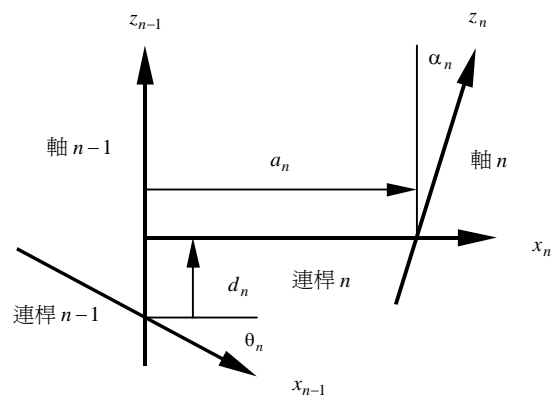


圖 1 基本空間機構連桿

於此

$$A_{n-1}^n = \begin{bmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \cos\alpha_n & \sin\theta_n \sin\alpha_n & a_n \cos\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \cos\alpha_n & -\cos\theta_n \sin\alpha_n & a_n \sin\theta_n \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在人體結構聯結關節中，如上臂與下臂的關節、大腿與小腿的關節都是屬於單軸運動的屈戌關節，自由度為一。運用齊次變換理論，將屈戌關節二側視為圖 1 中的連桿  $n-1$  與連桿  $n$ ，分析連桿  $n$  的四個齊次變換參數：連桿長度  $a_n$ 、連桿扭角  $\alpha_n$ 、連桿間旋轉角  $\theta_n$ 、連桿間距離  $d_n$ ，代入式(1)，即可敘述空間中點座標在座標系統  $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$  與  $S_{n-1}(X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1})$  的變換。

對於多軸運動的球窩關節，如上臂與軀幹的關節、大腿與軀幹的關節，自由度為三。將球窩關節視為連桿長度皆為零且連桿間距離亦為零的二個互相聯結的基本空間機構連桿，如圖 2 所示，連桿  $n-1$  與連桿  $n$  的連桿長度  $a_{n-1}$  與  $a_n$  以及連桿間距離  $d_n$  皆為零，則構成一個球窩關節。球窩關節二側為連桿  $n-2$  與連桿  $n+1$ ，軸  $n-2$ 、軸  $n-1$  與軸  $n$  為球窩關節多軸運動的軸線。分析圖 2 中的齊次變換參數，利用式(1)，即可敘述空間中點座標在座標系統  $S_{n+1}(X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1})$  與  $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$  的變換。重複利用式(1)，可將點座標由座標系統  $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$  變換至座標系統  $S_{n-1}(X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1})$ ，再變換至座標系統  $S_{n-2}(X_{n-2}, Y_{n-2}, Z_{n-2})$ ，如式(2)所示。

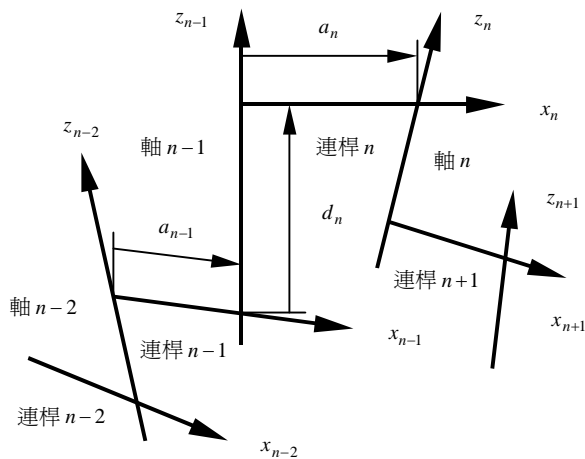


圖 2 球窩關節的基本空間機構連桿組成

$$\begin{bmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \\ 1 \end{bmatrix} = A_{n-2}^{n-1} A_{n-1}^n A_n^{n+1} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

### 3.研究成果

軀幹與上臂的關節具有手臂內收（外展）、肩內旋（外旋）、肩屈曲（伸展）的動作型態，自由度為三；上臂與下臂的關節具有肘屈曲（伸展）的動作型態，自由度為一；下臂與手的關節具有橈偏（尺偏）、內轉（外轉）、腕屈曲（伸展）的動作型態，自由度為三。依據軀幹與上臂、上臂與下臂、下臂與手的關節動作型態，可完成上肢的基本空間機構連桿組成與齊次變換上肢座標系統，如圖 3 與圖 4 所示。在圖 3 與圖 4 中，連桿長度  $a_1$  為二分之一肩寬，連桿長度  $a_4$ 、 $a_5$ 、 $a_8$  分別為上臂長、下臂長以及手長。手臂內收（外展）、肩內旋（外旋）、肩屈曲（伸展）、肘屈曲（伸展）、橈偏（尺偏）、內轉（外轉）、腕屈曲（伸展）的角度等人體動作型態運動參數與齊次變換參數中的連桿間旋轉角有關，表 1 為齊次變換上肢座標系統相關的齊次變換參數。利用式(1)，配合齊次變換上肢座標系統與齊次變換參數，即可描述空間中任一點在上肢不同座標系統的座標變換，完成齊次變換上肢數學模式。

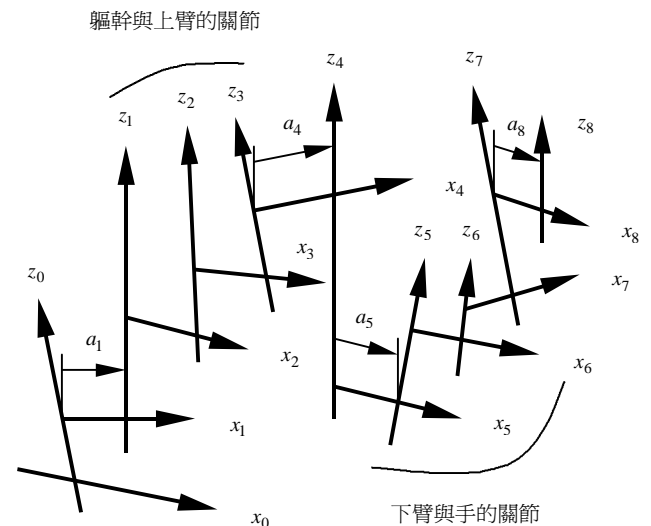


圖 3 上肢基本空間機構連桿組成

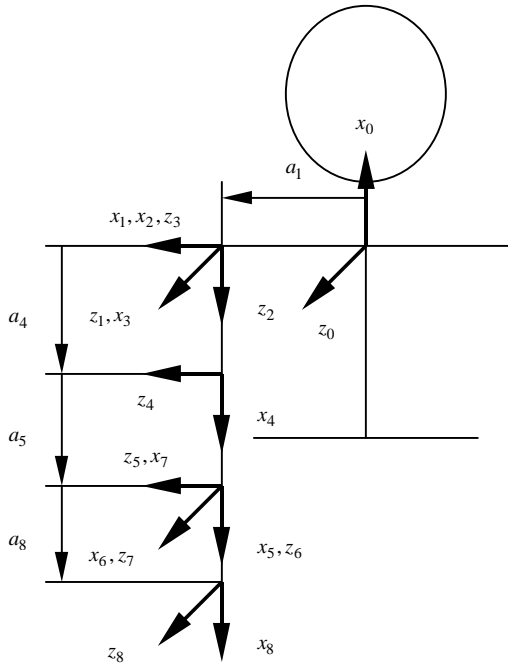


圖 4 齊次變換上肢座標系統

人體動作型態都有特定的活動範圍，也就是說人體動作型態運動參數皆必需在人體動作型態的活動範圍內。人體的工作姿勢可由人體動作型態運動參數來決定，依據人體計測資料庫的資訊，可建立人體動作型態運動參數與工作姿勢的關係。由王茂駿教授等多位著名學者(2002)完成的「台灣地區人體計測資料庫手冊」，本文以二十歲男子上肢部份的人體動作型態說明研究成果應用實例。在「台灣地區人體計測資料庫手冊」，可查得二十歲男子的平均肩寬與手長分別為 379.86mm 與 183.41mm，即表 1 中連桿長度  $a_1$  與  $a_8$  為 189.93mm 與 183.41mm。表 1 中連桿長度  $a_4$  為上臂長，本文採用二十歲男子平均的橈骨莖突至肩峰計測資料減橈骨莖突至橈骨點計測資料為 305.42mm，連桿長度  $a_5$  為下臂長，採用二十歲男子平均的橈骨莖突至橈骨點計測資料為 245.26mm。當上肢的人體動作型態皆無角度變化時，即手臂內收（外展）、肩內旋（外旋）、肩屈曲（伸展）、肘屈曲（伸展）、橈偏（尺偏）、內轉（外轉）、腕屈曲（伸展）的角度等人體動作型態運動參數皆為  $0^\circ$ 。則表 1 中齊次變換參數連桿間旋轉角  $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 、 $\theta_4$ 、 $\theta_5$ 、 $\theta_6$ 、 $\theta_7$ 、 $\theta_8$  分

別為  $0^\circ$ 、 $-90^\circ$ 、 $-90^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $90^\circ$ 。重複利用式 (1)，可將點座標由座標系統  $S_8(X_8, Y_8, Z_8)$  變換至座標系統  $S_0(X_0, Y_0, Z_0)$ ，如式(3)，

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = A_0^1 A_1^2 A_2^3 A_3^4 A_4^5 A_5^6 A_6^7 A_7^8 \begin{bmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

表 1 齊次變換上肢座標系統的齊次變換參數

連桿編號 (n)	連桿長度 ( $a_n$ )	連桿扭角 ( $\alpha_n$ )	連桿間旋轉角 ( $\theta_n$ )	連桿間距離 ( $d_n$ )
1	$\frac{1}{2}$ 肩寬	$0^\circ$	$90^\circ$	0
2	0	$-90^\circ$	手臂內收角度 或 - 手臂外展角度	0
3	0	$-90^\circ$	$-90^\circ$ - 肩內旋角度 或 $-90^\circ$ + 肩外旋角度	0
4	上臂長	$0^\circ$	$-90^\circ$ + 肩屈曲角度 或 $-90^\circ$ - 肩伸展角度	0
5	下臂長	$0^\circ$	肘屈曲角度 或 - 肘伸展角度	0
6	0	$90^\circ$	$90^\circ$ + 橈偏角度 或 $90^\circ$ - 尺偏角度	0
7	0	$90^\circ$	$90^\circ$ - 內轉角度 或 $90^\circ$ + 外轉角度	0
8	手長	$0^\circ$	$90^\circ$ + 腕屈曲角度 或 $90^\circ$ - 腕伸展角度	0

座標系統  $S_8(X_8, Y_8, Z_8)$  的原點為手部末端，將  $(x_8, y_8, z_8) = (0,0,0)$ ，代入式(3)，可得手部末端在座標系統  $S_0(X_0, Y_0, Z_0)$  的座標  $(x_0, y_0, z_0) = (-734.09, 189.93, 0)$ 。當上肢的人體動作型態運動參數為手臂外展  $30^\circ$ 、肩屈曲  $45^\circ$ 、肘屈曲  $20^\circ$ 、腕屈曲  $10^\circ$ ，其餘人體動作型態無角度變化時，則表 1 中齊次變換參數連桿間旋轉角  $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 、 $\theta_4$ 、 $\theta_5$ 、 $\theta_6$ 、 $\theta_7$ 、 $\theta_8$  分別為  $-30^\circ$ 、 $-90^\circ$ 、 $-45^\circ$ 、 $20^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $100^\circ$ 。同理可得手部末端在座標系統  $S_0(X_0, Y_0, Z_0)$  的座標  $(x_0, y_0, z_0) = (-358.83, 360.32, 601.95)$ 。由此應用

實例即可說明人體動作型態運動參數與工作姿勢的關係。

#### 4.結論

本文的研究成果如下所述：

- (1)建立齊次變換上肢座標系統。
- (2)分析齊次變換參數與人體動作型態運動參數。
- (3)完成齊次變換上肢數學模式。
- (4)建立人體動作型態運動參數與工作姿勢的關係。

本文的研究成果可提供人因工程設計者設計空間配置以及機械設計者設計機械防護的參考。使工作者在作業場所擁有舒適、安全的工作空間，提高生產效率，避免職業傷害。此外，本文研究成果亦可應用於生物力學與運動學的研究範疇。

#### 參考文獻

1. 杜壯(1988)，台灣地區少年人體計測調查研究，*技術學刊*，第3卷，第2期，頁165-173。
2. 邱魏津(1989)，台灣地區女子（19到23歲）人體計測調查之研究，*技術學刊*，第4卷，第3期，頁291-300。
3. 蔡穎堅、宋立民、張慧隆(1990)，蝸齒輪力矩參數與數學模式之研究，*中國機械工程學刊*，第11卷，第2期，頁135-145。
4. 林榮泰、紀佳芬、張世鵬(1993)，整合人體計測資料庫與電腦輔助設計系統之研究，*工業工程學刊*，第10卷，第3期，頁195-202。
5. 王茂駿、王明揚、黃雪玲、何明泉、許勝雄、李永輝、紀佳芬、杜壯、沈葆聖、林雅俐、李開偉(1997)，*本土化靜態與動態人體計測資料庫之建立*，國科會工程處。
6. 游萬來、宋同正、蔡登傳(1998)，手部在水平作業面上的作業區域研究，*工業工程學刊*，第15卷，第6期，頁605-613。
7. 王茂駿、王明揚、廖信銳、吳文言、林榮泰、黃啓梧、林雅俐(2000)，*本土化中小學生人體計測資料庫之建立*，國科會工程處。
8. 游萬來、宋同正、蔡登傳(2001)，工作平面上手部盲定位準確性的研究，*人因工程*，第3卷，第1期，頁49-56。
9. 王茂駿、王明揚、林昱呈(2002)，*台灣地區人體計測資料庫手冊*，中華民國人因工程學會。
10. Ayoub, M. M. (1973). Work place design and posture. *Human Factors*, 15, pp. 265-268.
11. Bridger, R. (1988). Postural adaptations to a sloping chair and work surface. *Human Factors*, 30, pp. 237-247.
12. Culver, C. and Viano, D. C. (1990). Anthropometry of seated women during pregnancy: defining a fetal region for crush protection research. *Human Factors*, 32, pp. 625-636.
13. Das, B. and Grady, R. M. (1983a). Industrial workplace layout design: an application of engineering anthropometry. *Ergonomics*, 26, pp. 433-447.
14. Das, B. and Grady, R. M. (1983b). The normal working area in the horizontal plane: a comprehensive analysis between Farley's and Squires' concepts. *Ergonomics*, 26, pp. 449-459.
15. Huang, C. W. and You, M. L. (1994). Anthropometry of Taiwanese woman. *Applied Ergonomics*, 25, pp. 186-187.
16. Kelly, P. L. and Kroemer, K. (1990). Anthropometry of the elderly: status and recommendation. *Human Factors*, 32, pp. 571-595.
17. Kroemer, K. (1989). Engineering anthropometry. *Ergonomics*, 32, pp. 767-784.
18. Stoudt, H. W. (1981). The anthropometry of the elderly. *Human Factors*, 23, pp. 29-37.

19. Sung, L. M. and Tsai, Y. C. (1994). An investigation of the tooth proportions and misalignments of involute bevel gear sets. *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, 15, pp. 273-281.
20. Sung, L. M. and Tsai, Y. C. (1997). A study on mathematical models and contact ratios of extended cycloid and cycloid bevel gear sets. *The International Journal of Mechanism and Machine Theory*, 32, pp. 39-50.
21. Tsai, Y. C. and Sung, L. M. (1993). A kinematic study for gear sets with skew axes. *Journal of Applied Mechanisms and Robotics*, 1, pp. 36-44.

#### 致謝

本研究由國科會計畫 NSC 91-2213-E-242-002 補助支持，特此誌謝。

