

# 齊次變換人體上肢數學模式在手部作業之研究

宋立民

輔英科技大學職業安全衛生系，大寮鄉永芳村進學路 151 號，高雄縣，臺灣

pl032@mail.fy.edu.tw

## 摘要

本文以齊次變換人體上肢數學模式為基礎，研究手部作業的生物力學分析，發展手腕、手肘與肩膀的生物力學數學模式。同時，探討手部作業在不同姿勢與位置時，手腕、手肘與肩膀承受的力與力矩。相關研究成果可以提供人因工程設計者作為設計手部作業空間配置的參考。使作業人員在作業場所運用適當的手部姿勢與位置，擁有符合人體工學、舒適的工作空間。一方面能夠降低作業人員肌肉骨骼傷害風險，避免造成肌肉骨骼的傷害；另一方面可以提振作業人員工作士氣，提高生產效率。本文的研究成果亦可應用在機械防護、生物力學以及運動學的研究範疇。

關鍵詞：齊次變換、人體上肢、手部作業

## Abstract

In this paper, the biomechanics of handy work is developed by the mathematical models of human upper limbs that are formulated by the theory of homogeneous transformation. The mathematical models of the biomechanics for the wrists, elbows, and shoulders are presented. The forces and torque applied to the wrists, elbows, and shoulders are investigated for the different postures and positions. The data is useful for the ergonomic engineers to design the space dispositions for handy work. The results presented in this paper are advantageous to prevent from the musculoskeletal hurt and improve the rate of production. The results are also applied to investigate the fields of mechanical prevention, biomechanics, and kinematics.

Keywords: Homogeneous Transformation, Human Upper Limb, Handy Work

## 1.前言

在作業場所中，適當的手部作業姿勢與位置不僅可以有效降低肌肉骨骼傷害的風險，更可提高作業人員的士氣與效率。本文利用宋立民(2003, 2004)發展的齊次變換人體上肢數學模式，研究手部作業的生物力學分析，完成手腕、手肘與肩膀的生物力學數學模式。同時，探討手部作業在不

同姿勢與位置時，手腕、手肘與肩膀承受的力與力矩。國內外有關本文的研究情況，在人體作業姿勢部分，王茂駿教授(1993)評估手套與姿勢對工作最大施力的影響。Lee 和 Chiou(1995)探討護理人員作業姿勢的人因工程分析。李開偉教授(1998)發展評估中文 Ovako 工作姿勢分析系統。宋立民(2003)發展齊次變換人體結構數學模式。

宋立民(2004)完成齊次變換在人體上肢數學模式的研究。在生物力學與肌肉骨骼傷害部分，Miller等人(1986)探討大負荷的腰椎力學特性。李開偉教授等人(1997)調查半導體製造業的累積性工作傷害現況。在人體計測資料庫部分，林榮泰教授等人(1993)以電腦輔助設計系統整合人體計測資料庫。王茂駿教授等多位著名學者(2002)建立台灣地區人體計測資料庫。在作業平面部分，Das和Grady(1983)分析水平作業面的正常作業區域。游萬來教授等人(1998)研究人體手部在水平作業面上的作業區域。

## 2.研究方法

本文以齊次變換人體上肢數學模式中的座標系統與齊次變換參數為基礎，研究手部作業的生物力學分析，分別發展手腕、手肘與肩膀的生物力學數學模式。圖1為基本空間機構連桿，包含二個具有旋轉或滑行功能的接頭。接頭 $n-1$ 與接頭 $n$ 的旋轉軸或滑行線為二條歪斜軸，分別為軸 $n-1$ 與軸 $n$ 。在軸 $n-1$ 與軸 $n$ 上，建立二個座標系統 $S_{n-1}(X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1})$ 與 $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ 。基本空間機構連桿 $n$ 的四個齊次變換參數為連桿長度 $a_n$ 、連桿扭角 $\alpha_n$ 、連桿間旋轉角 $\theta_n$ 、連桿間距離 $d_n$ 。利用齊次變換理論，可敘述空間中任一點在座標系統 $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ 的座標 $(x_n, y_n, z_n)$ 與在座標系統 $S_{n-1}(X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1})$ 的座標 $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ 之間的變換，如式(1)。

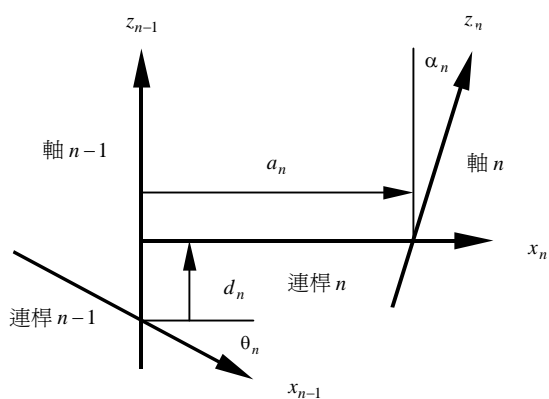


圖1 基本空間機構連桿

$$\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} = A_{n-1}^n \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

於此

$$A_{n-1}^n = \begin{bmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \cos \alpha_n & \sin \theta_n \sin \alpha_n & a_n \cos \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \cos \alpha_n & -\cos \theta_n \sin \alpha_n & a_n \sin \theta_n \\ 0 & \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上臂與下臂的關節屬於單軸運動的屈戌關節，自由度為一。運用齊次變換理論，將屈戌關節二側視為圖1中的連桿 $n-1$ 與連桿 $n$ ，分析連桿 $n$ 的四個齊次變換參數：連桿長度 $a_n$ 、連桿扭角 $\alpha_n$ 、連桿間旋轉角 $\theta_n$ 、連桿間距離 $d_n$ ，代入式(1)，即可敘述空間中點座標在座標系統 $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ 與 $S_{n-1}(X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1})$ 的變換。

上臂與軀幹的關節屬於多軸運動的球窩關節，自由度為三。將球窩關節視為連桿長度皆為零且連桿間距離亦為零的二個互相聯結的基本空間機構連桿，如圖2所示，連桿 $n-1$ 與連桿 $n$ 的連桿長度 $a_{n-1}$ 與 $a_n$ 以及連桿間距離 $d_n$ 皆為零，則構成一個球窩關節。球窩關節二側為連桿 $n-2$ 與連桿 $n+1$ ，軸 $n-2$ 、軸 $n-1$ 與軸 $n$ 為球窩關節多軸運動的軸線。分析圖2中的齊次變換參數，重複利用式(1)，即可敘述點座標在座標系統 $S_{n+1}(X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1})$ 與 $S_{n-2}(X_{n-2}, Y_{n-2}, Z_{n-2})$ 之間的變換，如式(2)。

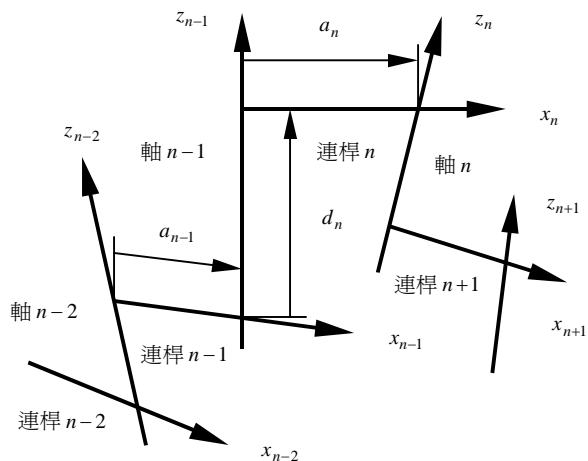


圖2 球窩關節的基本空間機構連桿組成

$$\begin{bmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \\ 1 \end{bmatrix} = A_{n-2}^{n-1} A_{n-1}^n A_n^{n+1} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

在齊次變換人體上肢數學模式中，軀幹與上臂的關節（即肩膀關節）具有手臂內收（外展）、肩內旋（外旋）、肩屈曲（伸展）的動作型態，自由度為三；上臂與下臂的關節（即手肘關節）具有肘屈曲（伸展）的動作型態，自由度為一；下臂與手的關節（即手腕關節）具有橈偏（尺偏）、內轉（外轉）、腕屈曲（伸展）的動作型態，自由度為三。圖 3 為齊次變換人體上肢座標系統，連桿長度  $a_1$  為二分之一肩寬，連桿長度  $a_4$ 、 $a_5$ 、 $a_8$  分別為上臂長、下臂長以及手長。此外，手臂內收（外展）、肩內旋（外旋）、肩屈曲（伸展）、肘屈曲（伸展）、橈偏（尺偏）、內轉（外轉）、腕屈曲（伸展）的角度等人體動作型態運動參數與齊次變換參數中的連桿間旋轉角有關，表 1 為齊次變換人體上肢座標系統的齊次變換參數。利用式(1)，配合齊次變換人體上肢座標系統與齊次變換參數，即可描述空間中任一點在人體上肢不同座標系統的座標變換。

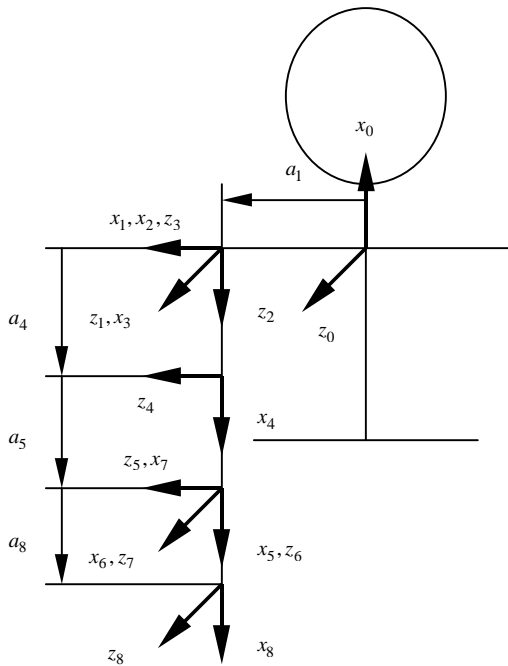


圖 3 齊次變換人體上肢座標系統

表 1 齊次變換人體上肢座標系統的齊次變換參數

連桿編號 ( $n$ )	連桿長度 ( $a_n$ )	連桿扭角 ( $\alpha_n$ )	連桿間旋轉角 ( $\theta_n$ )	連桿間距離 ( $d_n$ )
1	$\frac{1}{2}$ 肩寬	$0^\circ$	$90^\circ$	0
2	0	$-90^\circ$	手臂內收角度 或 - 手臂外展角度	0
3	0	$-90^\circ$	$-90^\circ$ - 肩內旋角度 或 $-90^\circ$ + 肩外旋角度	0
4	上臂長	$0^\circ$	$-90^\circ$ + 肩屈曲角度 或 $-90^\circ$ - 肩伸展角度	0
5	下臂長	$0^\circ$	肘屈曲角度 或 - 肘伸展角度	0
6	0	$90^\circ$	$90^\circ$ + 橈偏角度 或 $90^\circ$ - 尺偏角度	0
7	0	$90^\circ$	$90^\circ$ - 內轉角度 或 $90^\circ$ + 外轉角度	0
8	手長	$0^\circ$	$90^\circ$ + 腕屈曲角度 或 $90^\circ$ - 腕伸展角度	0

### 3. 研究成果

本文利用齊次變換人體上肢數學模式，發展手腕、手肘與肩膀的生物力學數學模式，探討手部作業時上肢各部位承受的力與力矩。在手腕生物力學分析中， $a_h$  為手的重心至手腕的距離， $a_b$  為手持物體重心至手腕的距離， $W_h$  與  $W_b$  分別為手重與手持物體重。手的重心在座標系統  $S_8(X_8, Y_8, Z_8)$  的座標為  $(a_h - a_8, 0, 0)$ ，重複利用式(1)，可將手的重心座標由座標系統  $S_8(X_8, Y_8, Z_8)$  變換至座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ，如式(3)。

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ 1 \end{bmatrix} = A_1^2 A_2^3 A_3^4 A_4^5 A_5^6 A_6^7 A_7^8 \begin{bmatrix} a_h - a_8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$(x_h, y_h, z_h)$  為手的重心在座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  的座標。同理，手持物體重心在座標系統  $S_8(X_8, Y_8, Z_8)$  的座標為  $(a_b - a_8, 0, 0)$ ，可將手持物體重心的座標由座標系統  $S_8(X_8, Y_8, Z_8)$  變換至

座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ，如式(4)。

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \\ 1 \end{bmatrix} = A_1^2 A_2^3 A_3^4 A_4^5 A_5^6 A_6^7 A_7^8 \begin{bmatrix} a_b - a_8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$(x_b, y_b, z_b)$  為手持物體重心在座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  的座標。此外，手腕在座標系統  $S_5(X_5, Y_5, Z_5)$  的座標為  $(0,0,0)$ ，可將手腕座標由座標系統  $S_5(X_5, Y_5, Z_5)$  變換至座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ，如式(5)。

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = A_1^2 A_2^3 A_3^4 A_4^5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$(x_w, y_w, z_w)$  為手腕在座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  的座標。由手的自由體圖，可分析得手腕承受的力與力矩，如式(6)與式(7)。

$$\vec{V}_w = -(W_b + W_h)\hat{j} \quad (6)$$

$$\vec{M}_w = M_{wx}\hat{i} + M_{wz}\hat{k} \quad (7)$$

於此

$$M_{wx} = (z_b - z_w)W_b + (z_h - z_w)W_h$$

$$M_{wz} = -(x_b - x_w)W_b - (x_h - x_w)W_h$$

在式(6)與式(7)中， $\hat{i}$ 、 $\hat{j}$ 、 $\hat{k}$  分別為座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  的單位向量。

在手肘生物力學分析中， $a_f$  為下臂重心至手肘的距離， $W_f$  為下臂重。下臂重心在座標系統  $S_5(X_5, Y_5, Z_5)$  的座標為  $(a_f - a_5, 0, 0)$ ，可將下臂重心的座標由座標系統  $S_5(X_5, Y_5, Z_5)$  變換至座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ，如式(8)。

$$\begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \\ 1 \end{bmatrix} = A_1^2 A_2^3 A_3^4 A_4^5 \begin{bmatrix} a_f - a_5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$(x_f, y_f, z_f)$  為下臂重心在座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  的座標。手肘在座標系統  $S_4(X_4, Y_4, Z_4)$  的座標為  $(0,0,0)$ ，可將手肘座標

由座標系統  $S_4(X_4, Y_4, Z_4)$  變換至座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ，如式(9)。

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} = A_1^2 A_2^3 A_3^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$(x_e, y_e, z_e)$  為手肘在座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  的座標。同理，可分析得手肘承受的力與力矩，如式(10)與式(11)。

$$\vec{V}_e = -(W_b + W_h + W_f)\hat{j} \quad (10)$$

$$\vec{M}_e = M_{ex}\hat{i} + M_{ez}\hat{k} \quad (11)$$

於此

$$M_{ex} = (z_b - z_e)W_b + (z_h - z_e)W_h + (z_f - z_e)W_f$$

$$M_{ez} = -(x_b - x_e)W_b - (x_h - x_e)W_h - (x_f - x_e)W_f$$

在肩膀生物力學分析中， $a_u$  為上臂重心至肩膀的距離， $W_u$  為上臂重。上臂重心在座標系統  $S_4(X_4, Y_4, Z_4)$  的座標為  $(a_u - a_4, 0, 0)$ ，可將上臂重心的座標由座標系統  $S_4(X_4, Y_4, Z_4)$  變換至座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ，如式(12)。

$$\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ 1 \end{bmatrix} = A_1^2 A_2^3 A_3^4 \begin{bmatrix} a_u - a_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$(x_u, y_u, z_u)$  為上臂重心在座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  的座標。肩膀在座標系統  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  的座標  $(x_s, y_s, z_s)$  為  $(0,0,0)$ 。式(13)與式(14)為肩膀承受的力與力矩。

$$\vec{V}_s = -(W_b + W_h + W_f + W_u)\hat{j} \quad (13)$$

$$\vec{M}_s = M_{sx}\hat{i} + M_{sz}\hat{k} \quad (14)$$

於此

$$M_{sx} = (z_b - z_s)W_b + (z_h - z_s)W_h \\ + (z_f - z_s)W_f + (z_u - z_s)W_u$$

$$M_{sz} = -(x_b - x_s)W_b - (x_h - x_s)W_h \\ - (x_f - x_s)W_f - (x_u - x_s)W_u$$

應用手腕、手肘與肩膀生物力學數學模式，配合 Webb Associates(1978)研究的人體各部重量佔體重百分比、Dempster(1955)探討的人體各部重心位置以及王茂駿教授等多位著名學者(2002)完成的「台灣地區人體計測資料庫手冊」，可以分析手部作業在不同姿勢、位置承受的力與力矩。在 Webb Associates(1978) 提供人體各部重量佔體重百分比中，單一上肢重佔體重的百分比為 5.1%，手重、下臂重與上臂重則佔單一上肢重的百分比為 11.8%、33.3%與 54.9%。所以，手重  $W_h$ 、下臂重  $W_f$  與上臂重  $W_u$  佔體重的百分比分別為 0.6%、1.7%與 2.8%。由體重可以推算手重  $W_h$ 、下臂重  $W_f$  與上臂重  $W_u$ 。在 Dempster(1955)提供人體各部重心位置中，手的重心至手腕的距離  $a_h$  為手長  $a_8$  的 50.6%，下臂重心至手肘的距離  $a_f$  為下臂長  $a_5$  的 43.0%，上臂重心至肩膀的距離  $a_u$  為上臂長  $a_4$  的 43.6%，詳見李開偉教授(2003)著作「實用人因工程學」。本文以二十歲男子的人體計測資料平均值，分析手部作業在不同姿勢、位置承受的力與力矩。在王茂駿教授等多位著名學者(2002)完成的「台灣地區人體計測資料庫手冊」中，可查得二十歲男子的體重為 64.93kg。依據 Webb Associates(1978)研究的人體各部重量佔體重百分比，可以推算手重  $W_h$ 、下臂重  $W_f$  與上臂重  $W_u$  分別為 0.39kg、1.10kg 與 1.82kg。二十歲男子的手長  $a_8$  為 183.41mm。肩寬為 379.86mm，故二分之一肩寬  $a_1$  為 189.93mm。在下臂長  $a_5$  部份，本文採用橈骨莖突至橈骨點計測值為 245.26mm。在上臂長  $a_4$  部份，採用橈骨莖突至肩峰計測值減橈骨莖突至橈骨點計測值為 305.42mm。依據 Dempster(1955)探討的人體各部重心位置，可以推算手的重心至手腕的距離  $a_h$  為 92.81mm，下臂重心至手肘的距離  $a_f$  為 105.46mm，上臂重心至肩膀的距離  $a_u$  為 133.16mm。

當手部作業在正常區域的範圍時，上臂自然下垂，以手肘為圓心，水平活動下臂與手。人體動作型態運動參數肩內旋（外旋）的角度決定手部作業在正常區域的位置，同時也決定齊次變換

參數  $\theta_3$ 。肘屈曲角度為  $90^\circ$ ，其餘人體動作型態運動參數為  $0^\circ$ 。所以，齊次變換人體上肢座標系統的齊次變換參數  $\theta_2$ 、 $\theta_4$ 、 $\theta_5$ 、 $\theta_6$ 、 $\theta_7$ 、 $\theta_8$  分別為  $0^\circ$ 、 $-90^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $90^\circ$ 。將齊次變換參數代入式(3)至式(14)，可知手腕、手肘與肩膀承受的力與力矩不因手部作業在正常區域位置的改變而不同。也就是說，下臂與手以手肘為圓心在正常區域活動時，手腕、手肘與肩膀承受的力與力矩完全不變。

當手部作業姿勢由正常區域肩內旋角度為  $0^\circ$  的位置向前延伸至最大區域，下臂與手保持直線，指尖接觸作業面時，將相關的齊次變換參數代入式(3)至式(14)，可得二十歲男子手部作業由正常區域向前延伸至最大區域，手腕、手肘與肩膀承受的力與力矩，如表 2 所示。由表 2 可知手部作業由正常區域向前延伸至最大區域的姿勢變化過程中，手腕、手肘承受的力矩微幅減少，肩膀承受的力矩大幅增加，而手腕、手肘與肩膀承受的力則依然不變。

表 2 二十歲男子手部作業承受的力與力矩

手部作業位置	手腕		手肘		肩膀	
	力	力矩	力	力矩	力	力矩
正常區域	0.39	36.20	1.49	247.85	3.31	247.85
肩屈曲 $15^\circ$	0.39	36.19	1.49	247.78	3.31	428.29
肩屈曲 $30^\circ$	0.39	36.03	1.49	246.72	3.31	595.44
肩屈曲 $45^\circ$	0.39	35.40	1.49	242.40	3.31	735.55
肩屈曲 $60^\circ$	0.39	33.82	1.49	231.59	3.31	835.58
最大區域	0.39	32.91	1.49	225.38	3.31	859.58

力的單位：kg

力矩的單位：kg-mm

#### 4.結論

本文以齊次變換人體上肢數學模式中的座標系統與齊次變換參數為基礎，完成手部作業的研究，獲致成果如下所述：

- (1)建立手腕、手肘與肩膀的生物力學數學模式。
- (2)分析手部作業在不同姿勢、位置時，手腕、手肘與肩膀承受的力與力矩。
- (3)手部作業不論在任何姿勢、位置時，手腕、手肘與肩膀承受的力皆不變。手腕承受手重與手持物體重，手肘承受手重、手持物體重與下臂重，肩膀承受手重、手持物體重、下臂重與上臂重。至於手腕、手肘與肩膀承受的肢體軸向力與徑向力，則隨手部作業姿勢與位置的變化而改變，相關影響為後續研究的重點。
- (4)手部作業由正常區域向前延伸至最大區域的姿勢變化過程中，手腕、手肘承受的力矩微幅減少，肩膀承受的力矩大幅增加。

本文的研究成果可提供人因工程設計者作為設計空間配置的參考。使作業人員在作業場所擁有安全、舒適的工作空間，避免職業傷害，提高生產效率。此外，本文研究成果亦可應用於機械防護、生物力學以及運動學的研究範疇。

#### 參考文獻

1. 王茂駿(1993)，*手套與姿勢對工作中最大施力影響之評估研究*，國科會。
2. 林榮泰、紀佳芬、張世鵬(1993)，*整合人體計測資料庫與電腦輔助設計系統之研究*，*工業工程學刊*，第 10 卷，第 3 期，頁 195-202。
3. 李開偉、陳志勇、葉文裕、朱振群(1997)，*半導體製造業累積性工作傷害現況調查*，*勞工安全衛生季刊*，第 5 卷，第 1 期，頁 1-14。
4. 李開偉(1998)，*中文 Ovako 工作姿勢分析系統的發展與評估*，國科會。
5. 游萬來、宋同正、蔡登傳(1998)，*手部在水平作業面上的作業區域研究*，*工業工程學刊*，第 15 卷，第 6 期，頁 605-613。
6. 王茂駿、王明揚、林昱呈(2002)，*台灣地區人體計測資料庫手冊*，中華民國人因工程學會。
7. 李開偉(2003)，*實用人因工程學*，全華，台北，二版，頁 3-29。
8. 宋立民(2003)，*齊次變換在人體結構數學模式與工作空間之研究*，國科會。
9. 宋立民(2004)，*齊次變換在人體上肢數學模式之研究*，*中華民國人因工程學會第十一屆年會暨研討會*。
10. Das, B., and Grady, R. M. (1983). The normal working area in the horizontal plane: a comprehensive analysis between Farley's and Squires' concepts. *Ergonomics*, 26, pp. 449-459.
11. Lee, Y. H., and Chiou, W. K. (1995). Ergonomic analysis of working posture in nursing personnel: example of modified Ovako working posture analysis system application. *Research in Nursing & Health*, 18, pp. 67-75.
12. Miller, J. A. A., Schultz, A. B., Warwick, D. N., and Spencer, D. L. (1986). Mechanical properties of lumbar spine motion segments under large loads. *Journal of Biomechanics*, 19, pp. 79-84.
13. Webb Associates (1978). *Anthropometric source book. NASA 1024*, Washington D. C.

#### 致謝

本研究由國科會計畫 NSC 92-2213-E-242-001 補助支持，特此誌謝。

